Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

| ПЛАН ЗА ТЕМАТА | | |
|---|---|---|
| **Партнерска организација** | Сојуз на стражувачи на Македонија - СИМ Скопје | |
| **Тема** | Линиски интеграли | |
| **Наслов на лекцијата** | Векторски линиски интеграл | |
| **Цели на учењето** | • Пресметка на векторски линиски интеграл по крива ориентирана во просторот.<br>• Примена на линиски интеграл за пресметка на работата извршена при движење на објект по крива во векторско поле.<br>• Опис на циркулацијата на векторско поле. | **Стратегии / Активности**<br>☐ Графички организатор<br>☐ Размисли / Спари / Сподели<br>☑ Моделирање<br>☑ Колаборативно учење<br>☑ Прашања за дискусија<br>☐ Проектно учење<br>☑ Учење базирано на проблеми |
| **Цел на лекцијата / Опис на практичниот проблем** | **Практичен проблем:** Како би ја пресметале работата извршена од векторското поле $\vec{F}$ за придвижување на честичка долж крива *C*?<br>• Ни треба векторски линиски интеграл. | |
| **Потребни претходни знаења** | • Пресмека на интеграли.<br>• Параметриизација на крива во простор. | |
| **Вовед / Теоретски основи** | Вториот тип на линиски интеграли се векторските линиски интеграли, кај кои интегрираме по крива низ векторско поле.<br><br>Хека $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k},$ биде непрекинато векторско поле во $\mathbb{R}^3$ кое претставува сила која дејствува врз честичка, и нека *C* е мазна крива во $\mathbb{R}^3$која се содрж во доменот на $\vec{F}$.<br><br>**Дефиниција.** Нека *f* е функција со домен што ја вклучува мазната крива C која е параметризирана со $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \le t \le b\,.$<br><br>Векторскиот линиски интеграл на $\vec{F}$ по *C* е:<br>$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}(t) = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\vec{r}\,'(t)dt\,.$$<br>Со оваа нотација имаме: | **Оценување за учењето**<br>☑ Набљудувања<br>☑ Разговори<br>☑ Работен примерок<br>☐ Конференција<br>☐ Список за проверка<br>☐ Дијагностика<br><br>**Оценувањето во текот на учењето**<br>☑ |

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

| | | |
|---|---|---|
| | $$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$<br>Затоа, работата извршена од $\vec{F}$ за придвижување на честичката во позитивна насока долж *C* се дефинира како:<br>$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}(t)\,.$$ | Самооценување<br>☐ Оценување од колеги<br>☐ Презентација<br>☐ Графички организатор<br>☐ Домашна работа |
| **Активност** | Прашања до студентите:<br>• Како да се пресметаат векторските линиски интеграли?<br>• Кои се својствата на векторските линиски интеграли?<br>• Дали имаат некоја примена?<br><br>Во врска со пресметката на векторските линиски интеграли ги даваме следните примери.<br><br>**Пример.** Најдете ја вредноста на векторскиот линиски интеграл<br>$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}(t)$$<br>каде *C* е кружницата параметрирана со:<br>$$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}\,, \quad 0 \le t \le \pi$$<br>и<br>$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}\,.$$<br>Приметете дека во овој пример векторското поле е дводимензионално. Сега имаме:<br>$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}(t) = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\vec{r}\,'(t)dt$$<br>$$= \int_0^\pi (-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}) \cdot (-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j})dt$$<br>$$= \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^\pi dt = \pi.$$<br><br>**Својства.** Векторските линиски интеграли ги имаат следните својства: | **Оценување на учењето**<br>☑ Тест<br>☑ Квиз<br>☐ Презентација<br>☐ Проект<br>☐ Објавено труд |

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t) = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t)\,;$$
$$\int_{C} (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{r}(t) = \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t) + \int_{C} \vec{G} \cdot d\vec{r}(t)$$
$$\int_{C} k\vec{F} \cdot d\vec{r}(t) = k \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t)\,, \quad \text{for a constant } k\,.$$

Слично како и кај скаларните линиски интеграли, пресметката на векторските линиски интеграли од криви кои се мазни по делови би била:

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t) = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t) + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t)\,.$$

Друга стандардна ознака за векторскиот линиски интеграл е следната:

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t) = \int_{C} Mdx + Ndy + Pdz\,.$$

**Пример.** Пресметајте

$$\int_{C} x^2 y dx + (y - z)dy + xzdz$$

каде:

a) *C* е кривата дадена со равенката:
$$\vec{r}(t) = \vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}\,, \quad 0 \le t \le 2;$$

**b)** *C* е линијата помеѓу (1,0,0) и (1,4,2).

За
$$\vec{r}(t) = \vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$$
ние имаме
$$x(t) = 1, y(t) = t^2 \text{ i } z(t) = t$$
и,
$$x^2 y dx + (y - z)dy + xzdz =$$
$$= 1^2 t^2 \cdot 0 \cdot dt + (t^2 - t)2tdt + 1 \cdot tdt\,.$$

За линискиот интеграл имаме:

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

$$\int_C x^2 y dx + (y-z)dy + xzdz =$$

$$= \int_0^2 (2t^3 - 2t^2 + t)dt = \frac{14}{3}.$$

Правата што минува од (1,0,0) до (1,4,2) ги има параметарските равенки:

$$x(t) = 1,\ y(t) = 4t \text{ and } z(t) = 2t$$

каде $0 \leq t \leq 1$и имаме:

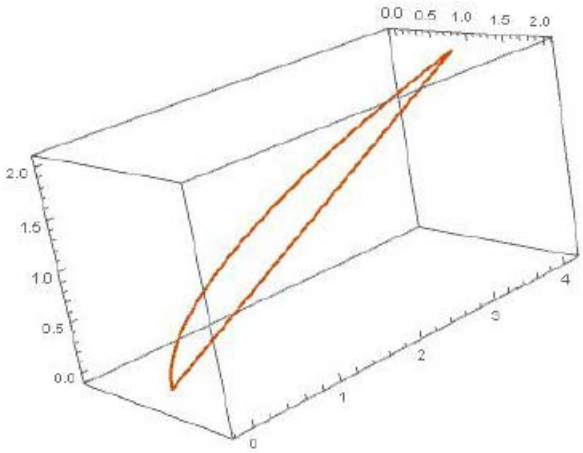
$$x^2 y dx + (y-z)dy + xzdz =$$

$$= 1^2 4t \cdot 0dt + (4t - 2t)4dt + 2t \cdot 2dt\,.$$

За линискиот интеграл добивме:

$$\int_C x^2 y dx + (y-z)dy + xzdz = \int_0^1 12tdt = 6\,.$$

**Забелешка.** Двете криви се дадени на следната слика. Тие започнуваат во иста точка и завршуваат во истата точка. Но вредноста на интегралот не е иста.




**Примена.**

Прашање до студентите:

- Дали сте запознаени со некоја примена на векторскиот интеграл?

Дискусија со учениците.

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

Векторските линиски интеграли се исклучително корисни во физиката. Тие може да се користат за пресметување на работата извршена од честичка која се движи под дејство на некоја сила или брзината на проток на течност низ кривата.

Во следниот пример ја пресметуваме работата направена од сила користејќи векторски линиски интеграл.

**Работа направена од сила.**

**Пример.** Колку работа е потребна за да се премести објект во полето на векторската сила

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$$

по патеката:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} + t^4\vec{k},\ 0 \le t \le 1\,.$$

Имаме:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}(t)$$

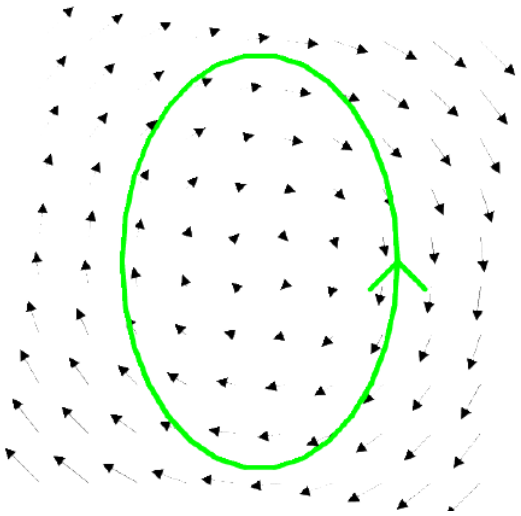
$$= \int_0^1 (yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}) \cdot (2t\vec{i} + \vec{j} + 4t^3\vec{k})dt$$

$$= \int_0^1 (t^5 \cdot 2t + t^3 + t^6 \cdot 4t^3)dt = \frac{131}{140}\,.$$

**Линиски интеграли како циркулација (проток).**
Векторскиот линиски интеграл објаснува како линискиот интеграл на векторско поле $\vec{F}$ врз насочената крива *C* „ ја додава“ компонентата на векторското поле што е тангентна на кривата. Во оваа смисла, линискиот интеграл мери колку векторското поле е насочено по кривата. Ако кривата *C* е затворена, тогаш линискиот интеграл покажува колку векторското поле има тенденција да циркулира околу кривата *C*: Всушност, за ориентирана затворена крива C; Линијата интеграл ја нарекуваме „циркулација“ (проток) од $\vec{F}$ околу *C*, видете ја следната слика:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}(t) = \quad \text{circulation of} \quad \vec{F} \quad \text{over} \quad C\,.$$

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."



**Пример.** Најдете ја циркулацијата на векторското поле

$$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$$

над елипсата

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Прво, ја претставуваме елипсата со нејзините параметарски равенки:

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 3\sin t\vec{j}\ 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Следно, имаме:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}(t) \quad =$$

$$= \int_0^{2\pi} (y\vec{i} - x\vec{j})\cdot(-2\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j})dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (3\sin t\vec{i} - 2\cos t\vec{j})\cdot(-2\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j})dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-6\sin^2 t - 6\cos^t) = -12\pi\,.$$

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

| | | |
|---|---|---|
| **Материјали / опрема / дигитални алатки / софтвер** | *Материјали за учење* се дадена како дел од референците на крајот од овој план.<br>*Опрема*: училница, табла, креди во различни бои.<br>*Дигитални алатки*: лаптоп, проектор, паметна табла.<br>*Софтвер*: Wolfram Mathematica. | |
| **Консолидација** | • Користење на материјали, опрема, дигитални алатки, софтвер од страна на професорите и студентите.<br>• Дискусија на професорот со учениците преку соодветни прашања.<br>• Самостојно решавање на едноставни задачи од страна на учениците под на надзор на професорот.<br>• давање примери од страна на професорот за воведување на нов концепт во соработка и преку дискусија со студентите.<br>• Задавање на домашна работа од страна на професорот со време за изработка до следниот час. | |

| **Рефлексии и следни чекори** | |
|---|---|
| **Активности кои функционираат** | **Делови кои треба да се разгледаат повторно** |
| Овој дел го пополнува професорот по часот, согласно неговата перцепција за успехот на часот. | Преку на успехот на домашните задачи изработени од страна на студентите, прашањата и дискусијата на почеток на следниот час, професорот доаѓа до заклучок кои делови на овој час треба да бидат ревидиран. |

**Референци**


[1] R. Wrede, M. Spiegel: Schaum's Outline of Advanced Calculus, Third Edition, Schaum's Edition, 2010, McGraw-Hill Companies, Inc.

[2] Фредерик П. Милер, Агнес Ф. Вандоме , Џон МекБрустер : Линиски интеграл, 2009 година, VDM Publishing.

[3] Т.М. Апостол: Векторска анализа, линиски интеграли и површински интеграли , 1960 година , Калифорниски институт за технологија.

[4] https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calciii/LineIntegralsPtI.aspx

[5] https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calciii/LineIntegralsPtII.aspx

[6] https://math.libretexts.org/


"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."