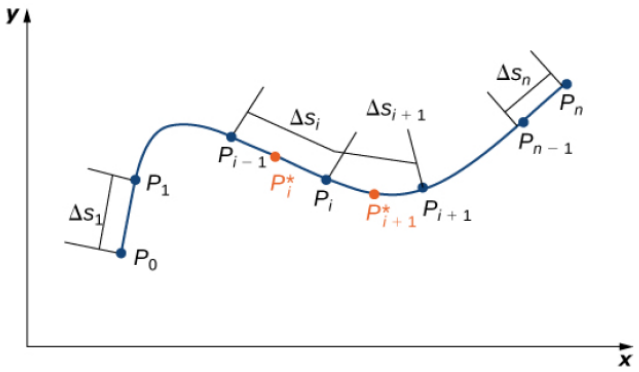
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

ПЛАН ЗА ТЕМАТА		
Партнерска организација	Сојуз на стражувачи на Македонија - СИМ Скопје	
Тема	Линиски интеграли	
Наслов на лекцијата	Скаларен линиски интеграл	
Цели на учењето	• Пресметка на скаларен линиски интеграл по крива. • Примена на линиски интеграл за да пресметка на должина на крива. • Примена на линиски интеграл за да пресметка на маса на жица.	**Стратегии / Активности** ☐ Графички организатор ☐ Размисли / Спари / Сподели ☑ Моделирање ☑ Колаборативно учење ☑ Прашања за дискусија ☐ Проектно учење ☑ Учење базирано на проблеми
Цел на лекцијата / Опис на практичниот проблем	**Практичен проблем:** Пресметај ја масата на пружината во форма на крива дефинирана параметарски со: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 2\cos t\vec{j} + 2\sin t\vec{k}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ и со функција на густина дадена со $\rho(x,y,z) = e^x + yz$.	
Потребни претходни знаења	• Пресмека на интеграли. • Параметризација на крива во рамнина. • Параметриизација на крива во простор.	**Оценување за учењето** ☑ Набљудувања ☑ Разговори ☑ Работен примерок ☐ Конференција ☐ Список за проверка ☐ Дијагностика
Вовед / Теоретски основи	**Скаларни линиски интеграли.** Овој тип на интеграл го нарекуваме и линиски интеграл на *f* во однос на должината на лакот. За формален опис на интеграл на скаларна линија, нека *C* е мазна крива во просторот дадена со: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \le t \le b\,.$ Нека $f = f(x,y,z)$ биде функција со домен кој ја вклучува кривата *C.* За да го дефинираме интегралот, започнуваме како што започнуваат повеќето дефиниции за интеграл: ја сечкаме кривата на мали парчиња. Го делиме интервал [a,b] во *n* потинтервали $[t_i, t_{i+1}]$ каде $t_0 = a$ и $t_n = b$. Нека t_i^* е вредност во подинтервалот $[t_i, t_{i+1}]$. Ги означуваме крајните точки	**Оценувањето во текот на учењето** ☑ Самооценување ☐ Оценување од колеги ☐ Презентација ☐ Графички

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

	$\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \ldots, \vec{r}(t_n)$ со P_0 , P_1 ,..., P_n . Видете ја сликата подолу.  Точките P_i ја делат кривата C на делови C_0 , C_1,..., C_n , со должини: $\triangle s_0, \triangle s_1, \ldots, \triangle s_n.$ На крајот, ја оценуваме функцијата во точката P_i*, множиме со Δs_i и собираме за $1 \leq i \leq n$. **Дефиниција.** Нека f е функција со домен што ја вклучува глатката крива C која е параметризирана со $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b\,.$ Скаларниот интеграл на f долж кривата C е: $\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\triangle s_i\,,$ ако оваа граница постои, и P_i * и Δs_i се дефинирани како досега.	организатор ☐ Домашна работа **Оценување на учењето** ☑ Тест ☑ Квиз ☐ Презентација ☐ Проект ☐ Објавено труд
Активност	Прашања до студентите: • Како да се пресметаат новите дефинирани интеграли? • Како можеме да ја поврземе должината на даден интеграл со скаларниот линиски интегралот на истата крива? Прашањето за тоа како да се оцени скаларниот линиски интегралот ја дава следната теорема. **Теорема.** Нека f е непрекината функција со домен што ја вклучува мазната крива C со параметризација: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b\,.$	

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

Потоа,

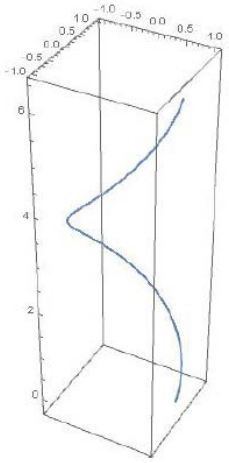
$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt\,.$$

Пример. Пресметајте

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$$

каде C е дадена со $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ за $0\le t\le 2\pi$ од (1,0,0) до $(1,0,2\pi)$.

Кривата по која ќе интегрираме е дадена на следната слика:



Користејќи ја теоремата за пресметка на линискиот интеграл имаме:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t+\sin^2 t+t^2)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\pi(1+4\pi^2/3)\,.$$

Следно, ако сакаме само да ја пресметаме должината на кривата C, односно да ја пресметаме должината на лакот, треба да земеме:

$$f(x,y,z)=1$$

а потоа должината на лакот на C ќе се пресмета со:

$$\int_C ds\,.$$

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

Пример . Најдете ја должината на жица со параметаризација: $x=3t+1$, $y=4-2t$, $z=5+2t$, $0\le t\le 4$.
Имаме:

$$\begin{aligned}\int_C ds &= \int_0^4 \sqrt{(3)^2+(-2)^2+2^2}\,dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{17}\,dt = 4\sqrt{17}\,.\end{aligned}$$

Својства. Скаларниот линиски интеграл ги има следните својства:

$$\int_C kf(x,y,z)ds = k\int_C f(x,y,z)ds\,,$$

$$\int_C (f\pm g)(x,y,z)ds = \int_C f(x,y,z)ds \pm \int_C g(x,y,z)ds$$

Бидејќи $\Delta s_i > 0$, кога ќе ја смениме насоката на кривата, линискиот интеграл нема да се промени

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{-C} f(x,y,z)ds\,.$$

Пресметката на интегралот преку крива мазна по делови е едноставна работа. Го пресметуваме интегралот на секој мазен дел, а потоа ги собираме. Имаме:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \int_{C_2} f(x,y,z)ds\,.$$

Примена.
Прашање до студентите:

- Дали сте запознаени со некоја примена на скаларниот линиски интеграл?

Дискусија со студентите.
Тие можат да се користат за пресметување на должина или маса на жица, површината на лист со дадена висина или електричниот потенцијал на жица под напон при дадена линеарна густина на полнежот.

Маса на жица.
Да претпоставиме дека парче жица е моделирано со кривата C во просторот. Масата по единица должина (линеарната густина) на жицата е непрекината функција

$$\rho(x,y,z).$$

Можеме да ја пресметаме вкупната маса на жицата

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

	користејќи го скаларниот линиски интеграл $\int_C \rho(x,y,z)ds$. На крајот од часот го даваме решението на проблемот со кој го започнавме пресметувајќи ја масата на пружината во форма на параметризирана крива. Имаме: $\int_C \rho(x,y,z)ds =$ $\int_0^{\pi/2} (e^x + yz)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt =$ $\int_0^{\pi/2} (e^t + 4\sin t\cos t)\sqrt{1^2 + (-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}dt =$ $\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} (e^t + 4\sin t\cos t)dt = \sqrt{5}(e^{\pi/2} + 1)$.	
Материјали / опрема / дигитални алатки / софтвер	*Материјали за учење* се дадена како дел од референците на крајот од овој план. *Опрема*: училница, табла, креди во различни бои. *Дигитални алатки*: лаптоп, проектор, паметна табла. *Софтвер*: Wolfram Mathematica.	
Консолидација	• Користење на материјали, опрема, дигитални алатки, софтвер од страна на професорите и студентите. • Дискусија на професорот со учениците преку соодветни прашања. • Самостојно решавање на едноставни задачи од страна на учениците под на надзор на професорот. • давање примери од страна на професорот за воведување на нов концепт во соработка и преку дискусија со студентите. • Задавање на домашна работа од страна на професорот со време за изработка до следниот час.	

Рефлексии и следни чекори	
Активности кои функционираат	**Делови кои треба да се разгледаат повторно**
Овој дел го пополнува професорот по часот, согласно неговата перцепција за успехот на часот.	Преку на успехот на домашните задачи изработени од страна на студентите, прашањата и дискусијата на почеток на следниот час, професорот доаѓа до заклучок кои делови на овој час треба да бидат ревидиран.

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

Референци

[1] R. Wrede, M. Spiegel: Schaum's Outline of Advanced Calculus, Third Edition, Schaum's Edition, 2010, McGraw-Hill Companies, Inc.

[2] Фредерик П. Милер, Агнес Ф. Вандоме , Џон МекБрустер : Линиски интеграл, 2009 година, VDM Publishing.
[3] ТМ Апостол: Векторска анализа, линиски интеграли и површински интеграли **,** 1960 година , Калифорниски институт за технологија.
[4] **https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calciii/LineIntegralsPtI.aspx**
[5] https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calciii/LineIntegralsPtII.aspx
[6] **https://math.libretexts.org/**

"The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."